# Leçon n° 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I/ Résolution de systèmes linéaires.

### A/ Par élimination de Gauss. [CIA] [CAL] [FGNAlg2]

**Proposition 1 :** Si $T$ est triangulaire, l'algorithme de remontée s'effectue en $O(n^2)$ opérations sur le corps $\mathbb{K}$.

**Définition 2 :** Matrices de transvections et dilatations (matrices élémentaires).

**Remarque 3 :** Opération sur les lignes $\leftrightarrow$ multiplication à gauche, opération sur les colonnes $\leftrightarrow$ multiplication à droite.

**Théorème 4 :** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et dilatations.

**Théorème 5 :** Si $A$ est une matrice rectangulaire, $A = PE$ où $P$ est inversible et $E$ est échelonnée réduite.

**Remarque 6 :** En utilisant cette décomposition (calculable en $O(n^3)$ opérations), on peut résoudre un système en $O(n^3)$ opérations en le couplant avec l'algorithme de remontée.

**Application 7 :** Calcul de l'inverse et du déterminant en $O(n^3)$ opérations.

### B/ Décomposition LU. [CIA]

**Proposition 8 :** Décomposition LU si les mineurs principaux sont non nuls.

**Remarque 9 :** La décomposition LU se calcule en $O(n^3)$ opérations.

**Application 10 :** Résolution de plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice $A$ : on résout $Lw = b$ puis $Uu = w$ et donc pour résoudre $n$ systèmes avec la même matrice $A$ l'algorithme nécessite $O(n^3)$ opérations (contrairement à $O(n^4)$ avec l'algorithme de Gauss).

**Application 11 :** Calcul du déterminant en $O(n^3)$ opérations.

**Exemple 12 :** Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $A$ admet une décomposition LU.

**Remarque 13 :** Toute matrice inversible admet une décomposition PLU où P est une matrice de permutation : il suffit de permuter les lignes de telle sorte à se ramener à une matrice ayant les mineurs principaux non nuls.

### C/ Décomposition de Cholesky (cas de $S_n^{++}(\mathbb{R})$) [CIA]

**Proposition 14 :** Décomposition de Cholesky.

**Remarque 15 :** La preuve utilise la décomposition LU.

**Remarque 16 :** L'algorithme pour trouver la décomposition est plus efficace que LU (toujours en $O(n^3)$ mais coûte deux fois moins d'opérations que LU).

### D/ Décomposition QR. [FGNAlg3]

**Proposition 17 :** Factorisation QR.

**Remarque 18 :** Issue du processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt qui en donne une méthode de calcul.

## II/ Réductions d'endomorphismes.

### A/ Décomposition de Dunford. [BER] [ROM]

**Lemme 19 :** Lemme des noyaux.

**Définition 20 :** Sous-espaces caractéristiques.

**Théorème 21 :** Décomposition de Dunford.

**Développement 1**

**Proposition 22 :** Décomposition de Dunford effective.

#### B/ Réduction de Jordan. [ROM]

**Définition 23 :** Blocs de Jordan.

**Théorème 24 :** Réduction de Jordan pour les nilpotents.

**Corollaire 25 :** Réduction de Jordan dans le cas général.

#### C/ Applications. [ROM]

**Application 26 :** Calcul de l'exponentielle de matrice.

**Application 27 :** Résolution du système différentiel $Y' = AY$.

**Application 28 :** Calcul de la puissance d'une matrice grâce au binôme de Newton et Dunford.

### III/ Décomposition polaire. [CAL]

**Développement 2**

**Théorème 29 :** La décomposition polaire est un homéomorphisme.

**Théorème 30 :** Dans le cas complexe aussi.

**Remarque 31 :** Écriture dans le cas $n = 1$ qui vient de l'écriture sous forme polaire des complexes.

**Application 32 :** $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

**Application 33 :** Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$.

**Application 34 :** $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{B}_{|||\cdot|||_2}(0,1)$

**Références :**


— [CAL] Caldéro Nouvelles Histoires Hédonistes tome 1 p. 203, p. 213, p. 347
— [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 177
— [FGNAlg3] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 40
— [CIA] Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle p. 72-90, p. 92
— [BER] Berhuy Algèbre le grand combat p. 941
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 611 et p. 681